水文事件隨機變量組合之應用

羅　慶　瑞

台灣省水利技師公會 理事、亞洲理工學院 工學博士、

亞太工程師、國際工程師、紐西蘭國際工程師

摘　　要

河川逕流調節計算數理統計之主要依據乃係頻率組合原理，例如：通過水庫年進水量與年供水量的頻率組合，以推求不同年差值水量的組合頻率；由水庫蓄水量與年差值水量的頻率組合，以計算各種庫位狀況下的可靠率等，這類問題都屬於二元隨機變量函數的概率分佈問題。由此可見，頻率組合是水庫調節計算數理統計法的核心內容。頻率組合主要是用機率理論中的兩個基本定理，如下述：

1.　事件相斥定理　若干事件如彼此相斥，則出現其中任意個事件的總機率等 於這些任意個事件分別出現的機率之和。

2.　獨立事件定理　若干事件如相互獨立，則其中任意個事件同時出現的機率等於這些任意個事件分別出現的機率之積。

一、 頻率組合之基本原理

在此只討論兩個隨機變量的函數的組合事件之頻率。

設兩隨機變量ξ、η的概率密度分別為fξ(x)、fη(y)，對於其一定函數關係的隨機變量為:

$$\zeta = \zeta(\xi , \eta) \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(1)$$

ζ的反函數，可寫成：ξ＝ξ(ζ、η)或η＝η(ζ、ξ)，設ζ的概率密度為fζ(z)＝f(x，y)，則ζ的分布函數為:

$$F_{\zeta}(z) = p\{\zeta \leq z\} = \int_{\zeta(\xi,\mu)\leq z}\int f(x, y)dxdy \ldots(2)$$

當ξ和η相互獨立時，對所有的x、y存在f(x，y)＝fξ(x)‧fη(y)代入上式，得:

$$F_{\zeta}(z) = \int_{\zeta(\xi,\mu)\leq z}\int f_{\xi}(x) f_{\zeta}(y)dxdy \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(3)$$

用累次積分可表為:

$$F_{\xi}(z)=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\eta(z,\xi)} f_{\xi}(x)f_{\eta}(y)dxdy \text{ ....}(4)$$

由於ξ、η的分布函數Fξ(x)、Fη(y)分別為:

$$F_{\xi}(x)=P\{\xi\le x\}=P_x=\int_{-\infty}^{\infty} f_{\xi}(x)dx$$

與 $F_{\eta}(y)=P\{\eta\le y\}=P_y=\int_{-\infty}^{y(x,\xi)} f_{\eta}(y)dy$

且 $dP_x=f_{\xi}(x)dx$　　$dP_y=f_{\eta}(y)dy$　因此，式(4)可寫為:

$$F_{\zeta}(z)=\int_{-\infty}^{\infty} f_{\xi}(x)dx\int_{-\infty}^{\eta(z,\xi)} f_{\eta}(y)dy$$

或

$$=\int_{-\infty}^{\infty} P_y f_{\xi}(x)dx=\int_{0}^{1} P_y dP_x \text{ ....}(5)$$

$$F_{\zeta}(z)=\int_{-\infty}^{\infty} P_x f_{\eta}(y)dy=\int_{0}^{1} P_x dP_y \text{ ....}(6)$$

上兩式可近似表為 $F\zeta(z)=\Sigma Py\cdot\triangle Px$　　　$F\zeta(z)=\Sigma Px\cdot\triangle Py$

上述兩隨機變量ξ和η，若非相互獨立，則η依ξ的條件分布函數:

$$F_{\eta}(y|x)=p_{y|x}=\int_{-\infty}^{y(z,\xi)} f_{\eta}(y|x)dx \text{ ....}(7)$$

其中fη(y｜x)為η依ξ條件機率密度。因此，ζ的分布函數應為

$$F_{\zeta}(z)=\int_{-\infty}^{\infty} P_{y|x}dP_x \quad \text{或} \quad F_{\zeta}(z)=\int_{-\infty}^{\infty} P_x\cdot dP_{y|x}$$

同樣，上兩式的近似計算式為 $F\zeta(z)=\Sigma Py|x\cdot\triangle Px$　$F\zeta(z)=\Sigma Px\cdot\triangle Px|y$

至於條件頻率曲線的推求，一般採用以下方法：

設兩隨機變量x、y的互相關係數為r，且兩者呈直線相關，則由回歸方程可得式(8)，相應於給定yi值的一組 $x^{(y_i)}$ 的條件均方差 $\sigma_x^{(y_i)}$ 與條件變異係數 $C_{v_x}^{(y_i)}$ 為式(9)與式(10)。通常，假定 $x^{(y_i)}$ 的條件偏差系數如式(11)所示。具　　備了以上條件頻率曲線 $(x^{(y_i)}\sim P)$ 的統計特徵值，$(\overline{x}^{(y_i)}、C_{v_x}^{(y_i)})$ 並參照隨機變量x總體的頻率曲線(x～P)的線型，就可推得相應的條件頻率曲線。

如應用福斯—雷布金表，可將條件頻率曲線表示如式(12)，分別將式(8)與式(10)代入上式，得式(13)：

$$\bar{x}^{(y_i)} = \bar{x} + r\frac{\sigma_x}{\sigma_y}(y_i - \bar{y})$$

$$= \bar{x} + r\frac{\bar{x}C_{v_x}}{\bar{y}C_{v_y}}(y_i - \bar{y}) \qquad \text{……………………………(8)}$$

式中：$\bar{x}^{(y_i)}$ 相應於給定y_i值的一組$x^{(yi)}$的條件均值；

$\bar{x}$、σ_x、C_{v_x} 分別為隨機系列x總體的均值、均方差與變異係數；

$\bar{y}$、σ_y、C_{v_y} 分別為隨機系列y總體的均值、

$$\sigma_x^{(y_i)} = \sigma_x\sqrt{1-r^2} \qquad \text{………………………………………(9)}$$

$$C_{v_x}^{(y_i)} = \frac{\sigma_x^{(y_i)}}{\bar{x}^{(y_i)}} = \frac{\sigma_x}{\bar{x}^{(y_i)}}\sqrt{1-r^2}$$

$$= \frac{\bar{x}}{\bar{x}^{(y_i)}}C_{v_x}\sqrt{1-r^2} \qquad \text{………………………………(10)}$$

$$C_{s_x}^{(y_i)} = 2C_{v_x}^{(1)} \qquad \text{………………………………………………(11)}$$

式中：$C_{v_x}^{(1)}$ 相應於 $y_i = 1$時的一組 $x^{(y_i)}$ 的條件變異係數。

$$x = \bar{x}^{(y_i)}(1 + C_{v_x}^{(y_i)}\Phi_P) \qquad \text{……………………………………(12)}$$

式中：Φ_P為離均系數，取決於$C_{s_x}^{(y_i)}$與頻率值P。

上式右端，除yi與Φ_P外，對於給定的隨機系列及相關係數均為確定值，說明按給定的yi值，就可依之推得相應的$(x^{(y_i)}{\sim}P)$曲線。此外，按式(11)的假定，對於一定隨機系列，因$C_{v_x}^{(1)}$數值不變，即$C_{s_x}^{(y_i)}$為一常值，這意味著Φ_P只隨頻率值P而變。因

此，對於不同yi值所繪出的條件頻率曲線，必然是一系列相互平行的曲線族。

$$x = \bar{x}^{(y_i)}\left(1 + \frac{\bar{x}}{\bar{x}^{(y_i)}} C_{v_x}\sqrt{1-r^2}\Phi_P\right)$$
$$= \bar{x}^{(y_i)} + \bar{x}C_{v_x}\sqrt{1-r^2}\Phi_P$$
$$= \bar{x} + r\frac{\bar{x}C_{v_x}}{\bar{y}C_{v_y}}(y_i - \bar{y}) + \bar{x}C_{v_x}\sqrt{1-r^2}\Phi_P \quad \ldots\ldots\ldots\ldots(13)$$

二、 頻率組合參數法

兩隨機變量x、y的頻率組合，當兩變量自身的頻率曲線都可用某種理論頻率曲線來模擬和概括，且其組合函數關係又較簡單，但限於z＝x±y或z＝xy時，則不論兩者之間的相關情況如何，都可由兩變量序列的統計參數，按給定的組合函數關係，推求組合函數的統計參數。

設兩隨機變量 x、y 的統計參數為均值$\bar{x}$、$\bar{y}$；均方差σ_x、σ_y；變異係數

C_{v_x}、C_{v_y}；偏歪系數C_{s_x}、C_{s_y}，其相關係數為 r。若組合函數關係　z＝x±y，

則其組合函數 z 的統計參數為均值　$\bar{Z} = \bar{x} \pm \bar{y}$

均方差　$\sigma_z = \sqrt{\sigma_x^2 + \sigma_y^2 \pm 2r\sigma_x\sigma_y}$

變異係數　$C_{v_z} = C_{v_x}\dfrac{\sqrt{1 + a^2 \pm 2ra}}{1 \pm b}$

偏歪系數　$C_{s_z} = \dfrac{C_{s_x}(1 \pm 3ra + 3r^2a^2) \pm aC_{s_y}}{(1 + a^2 \pm 2ra)^{3/2}}$

以上式中$a = \sigma_y / \sigma_x$; $b = \bar{y}/\bar{x}$;其它符號意義同前。

為獲得組合函數頻率曲線，除了經由上述諸式推求組合函數的各統計參數外，尚須確定組合函數頻率曲線的線型。對於一般情況，這是一個至今尚未深入研究和解決的複雜問題，也是廣泛應用頻率組合參數法的主要障礙。

當前，僅對其中個別特殊情況有明確的結論，如：相互獨立的n個正態分布變量，其組合頻率曲線仍屬正態分布。又如：對於相互獨立的n個兩參數的Gamma分布變量，只在各密度函數相同時，其和Σx_i的組合頻率曲線，才服從Gamma分布，如式(14)所示。對於相互獨立的兩Gamma分布變量x、y，則不論其密度函數是通過原點，即式(15)與式(16)；或密度函數不通過原點，即式(17)與式(18):

$$f(x_i)=\frac{\beta_i^{\alpha_i}}{\Gamma(\alpha_i)}x^{\alpha_i-1}e^{-\beta_i x}\cdots\cdots(14)$$

$(x_1>0\ ;\ I=1,2,\ldots,n)$

中的形狀參數 $\alpha_i=\frac{4}{C^2_{s_{x_i}}}$

與比對參數 $\beta_i=\frac{2}{C_{v_{x_i}}C_{s_{x_i}}}$

$$f_1(x)=\frac{\beta_1^{\alpha_1}}{\Gamma(\alpha_1)}x^{\alpha_1-1}e^{-\beta_1 x}\quad (x>0)\cdots\cdots(15)$$

$$f_2(y)=\frac{\beta_2^{\alpha_2}}{\Gamma(\alpha_2)}x^{\alpha_2-1}e^{-\beta_2 y}\quad (y>0)\cdots\cdots(16)$$

$$f_1(x)=\frac{\beta_1^{\alpha_1}}{\Gamma(\alpha_1)}(x-x_0)^{\alpha_1-1}e^{-\beta_1(x-x_0)}\quad (x>x_0)\ldots(17)$$

$$f_2(y)=\frac{\beta_2^{\alpha_2}}{\Gamma(\alpha_2)}(y-y_0)^{\alpha_2-1}e^{-\beta_2(y-y_0)}\quad (y>y_0)\ldots(18)$$

只有當$\beta_1=\beta_2=\beta$時，其和z＝x＋y的組合頻率曲線，才仍服從Gamma分布，這時的密度函數為:

$$f(z)=\frac{\beta^{\alpha_1+\alpha_2}}{\Gamma(\alpha_1+\alpha_2)}z^{\alpha_1+\alpha_2-1}e^{-\beta z}\quad (0<z<\infty)\cdots\cdots(19)$$ 或

$$f(z)=\frac{\beta^{\alpha_1+\alpha_2}}{\Gamma(\alpha_1+\alpha_2)}(z-x_0-y_0)^{\alpha_1+\alpha_2-1}e^{-\beta(z-x_0-y_0)}$$

$$(x_0+y_0<z<\infty)\ldots\ldots(20)$$

此外，有的學者認為，當兩隨機變量的相關係數|r|≒1.0；或偏歪系數C_{s_x}與 C_{s_y}都很小；或$C_{v_x}\cdot C_{s_x}$與$C_{v_y}\cdot C_{s_y}$兩乘積值很接近時，該兩隨機變量的和、差的組合頻率曲線，仍可認為服從Gamma分布。

對於其它一般情況下的組合頻率曲線的線型，則應作具體分析，不能任意主觀斷定。只有具備了組合頻率曲線的各統計參數，又能正確地判定其線型，才可獲得合理的組合頻率曲線。

三、 頻率組合解析法

上節所述的頻率組合參數法，由於對於一般情況下的組合頻率曲線的線型很難予以判定，有的甚至無法用目前常見的一些理論頻率曲線線型加以模擬和描述，這些原因都使頻率組合參數法的推廣受到許多限制。

本節討論在水文水利計算中最常遇見的兩Gamma分布隨機變量的和、差的組合頻率函數，並根據概率論基本原理，尋找出用初等函數表達的組合頻率函數的解析解。

設ξ、η為服從 Gamma 分布的兩隨機變量，當通過原點時，其密度函數分別為

$$f_\xi(X)=\frac{\beta_1^{\alpha_1}}{\Gamma(\alpha_1)}X^{\alpha_1-1}e^{-\beta_1 X}\quad (0\leqq x<\infty)\ldots\ldots\ldots(21)$$

$$f_\eta(Y)=\frac{\beta_2^{\alpha_2}}{\Gamma(\alpha_2)}Y^{\alpha_2-1}e^{-\beta_2 Y}\quad (0\leqq y<\infty)\ \ldots\ldots\ldots\ldots(22)$$

其中：$\alpha_1=\frac{4}{C_{s_1}^2}$　　$\alpha_2=\frac{4}{C_{s_2}^2}$

$\beta_1=\frac{2}{C_{v_1}\cdot C_{s_1}}$　$\beta_2=\frac{2}{C_{v_2}\cdot C_{s_2}}$

式中：X、Y　兩隨機變量；

α_1、β_1、C_{v_1}、C_{s_1}　分別為X的形狀參數、比對參數、變異係數與偏歪系數；

α_2、β_2、C_{v_2}、C_{s_2}　分別為Y的形狀參數、比對參數、變異係數與偏歪系數；

對於$C_{s_1}=2C_{v_1}$的情況，$\alpha_1=\beta_1$；對於$C_{s_2}=2C_{v_2}$的情況$\alpha_2=\beta_2$。

令兩隨機變量的均值$\overline{X}$、$\overline{Y}$之比為$a=\frac{\overline{X}}{\overline{Y}}$，引入新變量$x=\frac{X}{\overline{X}}$, $y=\frac{Y}{\overline{Y}}=a\cdot\frac{Y}{\overline{X}}$，

當取$\overline{X}=1$時，新變量即為$x=X$，同時式(21)、(22)可寫成：

$$f_\xi(x)=\frac{\beta_1^{\alpha_1}}{\Gamma(\alpha_1)}x^{\alpha_1-1}e^{-\beta_1 x}\qquad (x>0)\ldots\ldots\ldots\ldots(23)$$

$$f_\eta(y)=\frac{\beta_2^{\alpha_2}}{\Gamma(\alpha_2)}\left(\frac{y}{a}\right)^{\alpha_2-1}e^{-\frac{\beta_2}{a}y}\quad (y>0)\ldots\ldots\ldots\ldots(24)$$

以下按x、y之間的不同相關情況分述之。

(一) 兩事件相互獨立的情況(即r=0)

1. 兩事件之和的獨立組合頻率函數

兩相互獨立隨機變量ξ、η之和的隨機變量$\zeta=\xi+\eta$其組合頻率函數為:

$$F_\zeta(z)=P\{\zeta\ge z\}=P\{\xi+\eta\ge z\}=1-P\{\xi+\eta<z\}$$
$$=1-\int_0^\infty\int_0^{z-x}Kx^{\alpha_1-1}e^{-\beta_1 x}y^{\alpha_2-1}e^{-\frac{\beta_2}{a}y}dxdy \qquad (z\geqq 0)\ldots\ldots\ldots(25)$$

其中$K=\dfrac{\beta_1^{\alpha_1}\beta_2^{\alpha_2}}{a^{\alpha_2}\Gamma(\alpha_1)\Gamma(\alpha_2)}$，由於水文系列一般具有$\alpha>0$和$\beta>0$的統計特性，且a恒大於零，故對於$\alpha$1和$\alpha$2都為正整效的情況，式(25)可先就y積出，並應用二項次定理展開，經整理得:

$$F_\zeta(z)=1+\frac{Ke^{-\frac{\beta_2}{a}z}}{\left(\frac{\beta_2}{a}\right)^{\alpha_2}}\int_0^z e^{-(\beta_1-\frac{\beta_2}{a})x}\times\left\{(-1)^{\alpha_2-1}\left[\left(\frac{\beta_2}{a}\right)^{\alpha_2-1}C_{\alpha_2-1}^{\alpha_2-1}\right]\right.$$
$$x^{\alpha_1+\alpha_2-2}+(-1)^{\alpha_2-2}\left[\left(\frac{\beta_2}{a}\right)^{\alpha_2-1}C_{\alpha_2-1}^{\alpha_2-2}z+(\alpha_2-1)\times\left(\frac{\beta_2}{a}\right)^{\alpha_2-2}\right.$$
$$\left.C_{\alpha_2-2}^{\alpha_2-2}\right]x^{\alpha_1+\alpha_2-3}+(-1)^{\alpha_2-3}\left[\left(\frac{\beta_2}{a}\right)^{\alpha_2-1}C_{\alpha_2-1}^{\alpha_2-3}z^2+(\alpha_2-1)\times\right.$$
$$\left.\left(\frac{\beta_2}{a}\right)^{\alpha_2-2}C_{\alpha_2-2}^{\alpha_2-3}z+(\alpha_2-1)(\alpha_2-2)\times\left(\frac{\beta_2}{a}\right)^{\alpha_2-3}C_{\alpha_2-2}^{\alpha_2-3}\right]$$
$$\left.x^{\alpha_1+\alpha_2-4}+\ldots\right\}dx-\frac{K(\alpha_2-1)!}{\left(\frac{\beta_2}{a}\right)^{\alpha_2}}\int_0^z x^{\alpha_2-1}e^{-\beta_2 x}dx$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(26)$$

當$\left(\beta_1-\dfrac{\beta_2}{a}\right)>0$時，上式又可就x積出，經整理得

$$F_\zeta(z)=\frac{-ke^{-\beta_1 z}}{\left(\dfrac{\beta_2}{a}\right)\left(\beta_1-\dfrac{\beta_2}{a}\right)}$$

$$\Big\{\Big[(-1)^{\alpha_2-1}C_{\alpha_2-1}^{\alpha_2-1}+(-1)^{\alpha_2-2}C_{\alpha_2-1}^{\alpha_2-2}$$

$$+(-1)^{\alpha_2-3}C_{\alpha_2-1}^{\alpha_2-3}+\ldots\Big]z^{\alpha_1+\alpha_2-2}$$

$$+\left[\frac{1}{\left(\beta_1-\dfrac{\beta_2}{a}\right)}\Big((-1)^{\alpha_2-1}(\alpha_1+\alpha_2-2)C_{\alpha_2-1}^{\alpha_2-1}\right.$$

$$+(-1)^{\alpha_2-2}(\alpha_1+\alpha_2-3)$$

$$+\frac{K}{e^{\frac{\beta_2}{a}z}}\left\{\left[(-1)^{\alpha_2-1}\frac{(\alpha_1+\alpha_2-2)!\,C_{\alpha_2-1}^{\alpha_2-1}}{\left(\dfrac{\beta_2}{a}\right)\left(\beta_1-\dfrac{\beta_2}{a}\right)^{\alpha_1+\alpha_2-1}}\right.\right.$$

$$+(-1)^{\alpha_2-2}\frac{(\alpha_2-1)(\alpha_1+\alpha_2-3)!\,C_{\alpha_2-2}^{\alpha_2-2}}{\left(\dfrac{\beta_2}{a}\right)^2\left(\beta_1-\dfrac{\beta_2}{a}\right)^{\alpha_1+\alpha_2-2}}$$

$$+(-1)^{\alpha_2-3}\frac{(\alpha_2-1)(\alpha_2-2)(\alpha_1+\alpha_2-4)!\,C_{\alpha_2-3}^{\alpha_2-3}}{\left(\dfrac{\beta_2}{a}\right)^3\left(\beta_1-\dfrac{\beta_2}{a}\right)^{\alpha_1+\alpha_2-3}}$$

$$+\ldots\Big]+\left[(-1)^{\alpha_2-2}\frac{(\alpha_1+\alpha_2-3)!\,C_{\alpha_2-1}^{\alpha_2-2}}{\left(\dfrac{\beta_2}{a}\right)\left(\beta_1-\dfrac{\beta_2}{a}\right)^{\alpha_1+\alpha_2-2}}\right.$$

$$+(-1)^{\alpha_2-3}\frac{(\alpha_2-1)(\alpha_1+\alpha_2-4)!\,C_{\alpha_2-2}^{\alpha_2-3}}{\left(\dfrac{\beta_2}{a}\right)^2\left(\beta_1-\dfrac{\beta_2}{a}\right)^{\alpha_1+\alpha_2-3}}$$

$$+(-1)^{\alpha_2-4}\frac{(\alpha_2-1)(\alpha_2-2)(\alpha_1+\alpha_2-5)!\,C_{\alpha_2-3}^{\alpha_2-4}}{\left(\dfrac{\beta_2}{a}\right)^3\left(\beta_1-\dfrac{\beta_2}{a}\right)^{\alpha_1+\alpha_2-4}}$$

$$+\ldots\Big]z+\left[(-1)^{\alpha_2-3}\frac{(\alpha_1+\alpha_2-4)!\,C_{\alpha_2-1}^{\alpha_2-3}}{\left(\dfrac{\beta_2}{a}\right)\left(\beta_1-\dfrac{\beta_2}{a}\right)^{\alpha_1+\alpha_2-3}}\right.$$

$$+\left(-1\right)^{\alpha_2-4}\frac{\left(\alpha_2-1\right)\left(\alpha_1+\alpha_2-5\right)!\,C_{\alpha_2-2}^{\alpha_2-4}}{\left(\frac{\beta_2}{a}\right)^{2}\left(\beta_1-\frac{\beta_2}{a}\right)^{\alpha_1+\alpha_2-4}}$$

$$\left.+\left(-1\right)^{\alpha_2-5}\frac{\left(\alpha_2-1\right)\left(\alpha_2-2\right)\left(\alpha_1+\alpha_2-6\right)!\,C_{\alpha_2-3}^{\alpha_2-5}}{\left(\frac{\beta_2}{a}\right)^{3}\left(\beta_1-\frac{\beta_2}{a}\right)^{\alpha_1+\alpha_2-5}}+\ldots\right]z^2+\ldots\right\}$$

$$+\frac{K\left(\alpha_2-1\right)!}{\left(\frac{\beta_2}{a}\right)^{\alpha_2}e^{\beta_1 z}}\left\{\frac{1}{\beta_2}z^{\alpha_1-1}+\frac{\left(\alpha_1-1\right)}{\beta_1^{2}}z^{\alpha_1-2}\right.$$

$$\left.+\frac{\left(\alpha_1-1\right)\left(\alpha_1-2\right)}{\beta_1^{3}}z^{\alpha_1-3}+\ldots+\frac{1}{\beta_1^{\alpha_1}}\left(\alpha_1-1\right)!\right\}$$

經進一步分析寫出其通式：

$$F_{\zeta}(z)=\begin{cases}\dfrac{\beta_1^{\alpha_1}}{e^{\beta_1 z}}\displaystyle\sum_{j=1}^{\alpha_1}\frac{z^{\alpha_1-i}}{\left(\alpha_1-j\right)!}\left[\frac{1}{\beta_1^{j}}-\frac{1}{\left(j-1\right)!}\sum_{i=1}^{\alpha_2}\right.\\ \left.\times\dfrac{\left(-1\right)^{i-1}\left(\frac{\beta_2}{a}\right)^{i-1}\left(j-2+i\right)!}{\left(\beta_1-\frac{\beta_2}{a}\right)^{j-1+i}\left(i-1\right)!}\right]\\ +\dfrac{\beta_1^{\alpha_1}}{\left(\alpha_1-1\right)!\,e^{\frac{\beta_2}{a}z}}\displaystyle\sum_{i=1}^{\alpha_2}\frac{z^{\alpha_2-i}}{\left(\alpha_2-i\right)!}\cdot\sum_{j=1}^{i}\\ \dfrac{\left(-1\right)^{i-1}\left(\frac{\beta_2}{a}\right)^{\alpha_2-1}-i+j\left(\alpha_1-2+j\right)!}{\left(\beta_1-\frac{\beta_2}{a}\right)^{\alpha_1-1+j}\left(j-1\right)!} & (z>0)\,;\\ 1; & \end{cases}$$

(z=0);……………………..(27)

式(5-27)即為兩相互獨立隨機變量之和的組合頻率函數表達式，係全由初等函數構成，代入相應因子α1、β1、α2、β2與a、z值，即可直接計算其組合頻率值Fζ(z)。

2. 兩事件之差的獨立組合頻率函數

兩相互獨立隨機變量ξ、η之差的隨機變量$\zeta=\xi-\eta$，其組合頻率函數為:

$$F_{\zeta}(z)=P\{\zeta\geq z\}=P\{\xi-\eta\geq z\}$$
$$=\begin{cases} K\int_{z}^{\infty}\int_{0}^{x-z}x^{\alpha_1-1}e^{-\beta_1 x}y^{\alpha_2-1}e^{-\frac{\beta_2}{a}y}dxdy & (z\geq 0)\\ K\int_{0}^{\infty}\int_{0}^{x-z}x^{\alpha_1-1}e^{-\beta_1 x}y^{\alpha_2-1}e^{-\frac{\beta_2}{a}y}dxdy & (z<0)\end{cases}$$

……………………………………………………………(28)

同樣，當α_1與α_2為正整數時，上式可直接積出，並應用二項式定理展開。

對於z≧0區段，經整理得:

$$F_{\zeta}(z)=\frac{-Ke^{-\beta_1 z}}{\left(\frac{\beta_2}{a}\right)\left(\beta_1+\frac{\beta_2}{a}\right)}\left\{\left[C^0_{\alpha_2-1}-C^1_{\alpha_2-1}-C^2_{\alpha_2-1}\ldots-\right.\right.$$

$$\left.+(-1)^{\alpha_2-1}C^{\alpha_2-1}_{\alpha_2-1}\right]z^{\alpha_1+\alpha_2-2}+\left[\frac{1}{\left(\beta_1+\frac{\beta_2}{a}\right)}\left((\alpha_1+\alpha_2-2)C^0_{\alpha_2-1}\right.\right.$$

$$-(\alpha_1+\alpha_2-3)C^1_{\alpha_2-1}+(\alpha_1+\alpha_2-3)C^2_{\alpha_2-1}-\ldots$$

$$\left.+(-1)^{\alpha_2-1}(\alpha_1-1)C^{\alpha_2-1}_{\alpha_2-1}\right)$$

$$\left.+\frac{(\alpha_2-1)}{\left(\frac{\beta_2}{a}\right)}\left(C^0_{\alpha_2-2}-C^1_{\alpha_2-2}+C^2_{\alpha_2-2}-\ldots+(-1)^{\alpha_2-2}C^{\alpha_2-2}_{\alpha_2-2}\right)\right]z^{\alpha_1+\alpha_2-3}$$

$$+\left[\frac{1}{\left(\beta_1+\frac{\beta_2}{a}\right)^2}\left((\alpha_1+\alpha_2-2)(\alpha_1+\alpha_2-3)C^0_{\alpha_2-1}\right.\right.$$

$$-(\alpha_1+\alpha_2-3)(\alpha_1+\alpha_2-4)C^1_{\alpha_2-1}-\ldots(-1)^{\alpha_2-1}$$

$$-(\alpha_1+\alpha_2-4)(\alpha_1+\alpha_2-5)C^2_{\alpha_2-1}-\ldots$$

$$\times\left(-1\right)^{\alpha_2-1}\left(\alpha_1-1\right)\left(\alpha_1-2\right)C_{\alpha_2-1}^{\alpha_2-1}\Big)+\frac{\left(\alpha_2-1\right)}{\left(\beta_1+\frac{\beta_2}{a}\right)\left(\frac{\beta_2}{a}\right)}$$

$$\times\Big(\left(\alpha_1+\alpha_2-3\right)C_{\alpha_2-2}^{0}-\left(\alpha_1+\alpha_2-4\right)C_{\alpha_2-2}^{1}$$

$$+\left(\alpha_1+\alpha_2-5\right)C_{\alpha_2-2}^{2}-\ldots+\left(-1\right)^{\alpha_2-2}\left(\alpha^2-1\right)C_{\alpha_2-2}^{\alpha_2-2}\Big)$$

$$+\frac{\left(\alpha_2-1\right)\left(\alpha_2-2\right)}{\left(\frac{\beta_2}{a}\right)^2}\Big(C_{\alpha_2-3}^{0}-C_{\alpha_2-3}^{1}+C_{\alpha_2-3}^{2}-\ldots$$

$$+\left(-1\right)^{\alpha_2-3}C_{\alpha_2-3}^{\alpha_2-3}\Big)\Big]z^{\alpha_1+\alpha_2-4}+\ldots\Big\}$$

$$+\frac{K\left(\alpha_2-1\right)!}{\left(\frac{\beta_2}{a}\right)e^{\beta_1 z}}\left\{\frac{1}{\beta_2}z^{\alpha_1-1}+\frac{\left(\alpha_1-1\right)}{\beta_1^2}z^{\alpha_1-2}\right.$$

$$\left.+\frac{\left(\alpha_1-1\right)\left(\alpha_1-2\right)}{\beta_1^3}z^{\alpha_1-3}+\ldots+\frac{1}{\beta_1^{\alpha_1}}\times\left(\alpha_1-1\right)!\right\}$$

對於x＜0區段，經整理得:

$$F_{\zeta}(z)=1-\frac{Ke^{\frac{\beta_2}{a}z}}{\left(\frac{\beta_2}{a}\right)^{\alpha_2}}\left\{\left[\left[\frac{\left(\frac{\beta_2}{a}\right)^{\alpha_2-1}\left(\alpha_1-1\right)!}{\left(\beta_1+\frac{\beta_2}{a}\right)^{\alpha_1}}\right]\times\left(-z\right)^{\alpha_2-1}\right.\right.$$

$$+\left[\frac{\left(\alpha_1-1\right)\left(\frac{\beta_2}{a}\right)^{\alpha_2-2}\left(\alpha_1-1\right)!}{\left(\beta_1+\frac{\beta_2}{a}\right)^{\alpha_2}}\right.$$

$$\left.+\frac{\left(\frac{\beta_2}{a}\right)^{\alpha_2-2}\alpha_1!C_{\alpha_2-1}^{\alpha_2-2}}{\left(\beta_1+\frac{\beta_2}{a}\right)^{\alpha_1+1}}\right]\left(-z\right)^{\alpha_2-1}$$

$$+\left[\frac{\left(\alpha_1-1\right)\left(\alpha_1-2\right)\left(\frac{\beta_2}{a}\right)^{\alpha_2-3}\left(\alpha_1-1\right)!}{\left(\beta_1+\frac{\beta_2}{a}\right)^{\alpha_1}}\right.$$

$$+\frac{\left(\alpha_1-1\right)\left(\frac{\beta_2}{a}\right)^{\alpha_2-2}\alpha_1!C_{\alpha_2-2}^{\alpha_2-3}}{\left(\beta_1+\frac{\beta_2}{a}\right)^{\alpha_1+1}}$$

$$+\frac{\left(\frac{\beta_2}{a}\right)^{\alpha_2-1}(\alpha_1-1)!C_{\alpha_2-1}^{\alpha_2-3}}{\left(\beta_1+\frac{\beta_2}{a}\right)^{\alpha_1+2}}\Bigg](-z)^{\alpha_2-3}+\ldots\Bigg\}$$

經進一步分析，也不難分別寫出其通式：

$$F_\zeta(z)=\begin{cases}\dfrac{\beta_1^{\alpha_1}}{e^{\beta_1 z}}\displaystyle\sum_{j=1}^{\alpha_1}\dfrac{z^{\alpha_1-j}}{(\alpha_1-j)!}\Bigg[\dfrac{1}{\beta_1^j}-\dfrac{1}{(j-1)!} \\ \times\displaystyle\sum_{i=1}^{\alpha_2}\dfrac{\left(\frac{\beta_2}{a}\right)^{i-1}(j-2+i)!}{\left(\beta_1+\frac{\beta_2}{a}\right)^{j-1+i}(i-1)!}\Bigg];(z>0) \\ 1-\dfrac{\beta_1^{\alpha_1}}{(\alpha_1-1)!}\displaystyle\sum_{i=1}^{\alpha_2}\dfrac{\left(\frac{\beta_2}{a}\right)^{i-1}(\alpha_1-2+i)!}{\left(\beta_1+\frac{\beta_2}{a}\right)^{\alpha_1-1+i}(i-1)!};(z=0) \\ 1-\dfrac{\beta_1^{\alpha_1}e^{\frac{\beta_2}{a}z}}{(\alpha_1-1)!}\displaystyle\sum_{i=1}^{\alpha_2}\dfrac{(-z)^{\alpha_2-1}}{(\alpha_2-i)!} \\ \times\displaystyle\sum_{j=1}^{i}\dfrac{\left(\frac{\beta_2}{a}\right)^{\alpha_2-1-i+j}(\alpha_1-2+j)!}{\left(\beta_1+\frac{\beta_2}{a}\right)^{\alpha_1-1+i}(j-1)!}\Bigg];(z<0)\end{cases}$$

…………………………………(29)

式(29)即為兩相互獨立隨機變量之差的組合頻率函數表達式，也全由初等函數構成，代入相應因子α_1、β_1、α_2、β_2與a、z值，即可直接計算其組合頻率值$F_\zeta(z)$。

（二）兩事件極相關的情況（即$|r|\approx 1.0$）：

若兩隨機變量x、y之間的互相關係數 ，且呈直線相關，參照式(8)其回歸方程為：

$$\begin{aligned}\bar{y}^{(x_i)}&=\bar{y}+r\frac{\sigma_y}{\sigma_x}(x_i-\bar{x})\\&=\bar{y}+r\frac{\bar{y}C_{v_y}}{\bar{x}C_{v_x}}(x_i-\bar{x})\text{……………………….(30)}\end{aligned}$$

當取$\bar{x}$為1.0時，$\bar{y}$記為a，且由於$|r|\approx 1.0$，其回歸線均方誤

$S_y=\sigma_y\sqrt{1-r^2}\approx 0$，因此，一組以$\bar{y}^{(x_i)}$為均值的y值，只取$y^{(x_i)}$值，故

式(28)可寫成:

$$y^{(x_i)} = a + r\frac{aC_{v_y}}{C_{v_x}}(x_i - i)\text{……………………………}(31)$$

對於組合函數關係 $z = x_i + y^{(x_i)}$ 代入式(31)，得

$$x_i = \frac{z - a + \dfrac{aC_{v_y}}{C_{v_x}}}{1 + \dfrac{aC_{v_y}}{C_{v_x}}} \quad (r \approx 1.0)\text{……………………}(32)$$

$$x_i = \frac{z - a - \dfrac{aC_{v_y}}{C_{v_x}}}{1 - \dfrac{aC_{v_y}}{C_{v_x}}} \quad (r \approx -1.0)\text{……………………}(33)$$

對於組合函數關係 $z = x_i - y^{(x_i)}$ 代入式(31)，得

$$x_i = \frac{z + a - \dfrac{aC_{v_y}}{C_{v_x}}}{1 - \dfrac{aC_{v_y}}{C_{v_x}}} \quad (r \approx 1.0)\text{……………………}(34)$$

$$x_i = \frac{z + a + \dfrac{aC_{v_y}}{C_{v_x}}}{1 + \dfrac{aC_{v_y}}{C_{v_x}}} \quad (r \approx -1.0)\text{……………………}(35)$$

推求一定z值的頻率，可按給定的組合函數關係及相關係數，選用上述式(32)至(35)中的相應公式，算出xi值，對應於該xi的頻率值，即為z值的頻率

$$F_{\zeta}(z) = \begin{cases} \dfrac{\beta_1^{\alpha_1}}{\Gamma(\alpha_1)}\displaystyle\int_{x_i}^{\infty} x^{\alpha_1 - 1} e^{-\beta_1 x}dx & (x_i > 0) \\ 1 & (x_i = 0) \end{cases} \text{………..}(36)$$

當 $\beta_1 > 0$，且 α_1 為正整數時，可得解析解為式(37)與式(38)。式(37)與(38)即為兩隨機變量x、y關係密切情況下，兩者之和、差的組合頻率函數表達式，代入相應已知因子α1、β1與xi值，即可直接計算其組合頻率值Fζ(z)。其中的xi值是根據給定的z值，按組合函數關係與相關系數r值，由式(32)或(33)，或由式(34)或(35)算得的。

$$F_{\zeta}(z)=\begin{cases}\dfrac{e^{-\beta_1 x_i}}{\Gamma(\alpha_1)}\Big[(\beta_1 x_i)^{\alpha_1-1}+(\alpha_1-1)(\beta_1 x_i)^{\alpha_1-2} \\ +(\alpha_1-1)(\alpha_1-2)(\beta_1 x_i)^{\alpha_1-3}+\ldots+ \\ (\alpha_1-1)!\Big] & (x_i>0) \\ 1 & (x_i=0)\end{cases}$$

……………………………………………………………(37)

或 $$F_{\zeta}(z)=\begin{cases}\dfrac{e^{-\beta_1 x_i}}{\Gamma(\alpha_1)}\sum_{j=1}^{\alpha_1}\dfrac{(\alpha_1-1)!}{(\alpha_1-j)!}(\beta_1 x_i)^{\alpha_1-j} & (x_i>0) \\ 1 & (x_i=0)\end{cases}$$

……………………………………………………………(38)

四、 結語

由於水文樣本為一種隨機事件，機率分配是水文事件中常見的現象，因此筆者在行筆之間便不期然的將機率分佈函數與統計學之理論相互結合，期能說明這種隨機之特性，除進一步闡述數理工具之應用外，更希望能加以充實現有之規範。

五、 參考文獻

1. Ven Te, Chow. “ Handbook of Applied Hydrology”, 大學圖書出版社, 1972.
2. H. M. Raghunath. “ Hydrology”, 北門出版社, 1985.
3. 翟家瑞. “常用水文預報算法和計算程序”, 黃河水利出版社, 1995.
4. 陳守煜. “模糊水文學與水資源系統模糊優化原理”,大連理工大學出版社, 1990.
5. 張超. “水資源系統動態規劃”, 水利水電出版社, 1986.
6. 張文華. “實用暴雨洪水預報理論與方法”, 水利水電出版社, 1990.

投稿 105.05.06
校稿 105.05.20
定稿 105.05.23