暴雨量頻率分析之實務研討

林維明

台灣省水利技師公會理事

摘要

水文資料如降雨量或波浪量等都是隨機性。故必須利用實測資料，根據統計學原理，推測未來可能發生之數值以供規畫與設計之參考數據。本文撰寫之動機是想以一件實測暴雨量數據用不同的頻率分析方法解析，讓應用者清晰明白不同推算方式的實務。其目的為給與從事實務者，充分掌握暴雨量資料頻率分析之應用。本文先概述工程上常用的暴雨量頻率分析方法、其次再以一案例用諸方法解析，最後就所得之結果作比較討論。預期對初學者可增強廣泛的頻率分析實務。

關鍵詞：暴雨量、頻率分析、復現期、最小二乘法。

一、前言

因為波浪或雨量會隨時隨地而變，所以很難做線性分析，筆者曾再水利會訊第九期討論過暴雨量頻率分析，並概述海生（Hazen）法及對數皮爾森第三型分析（Log-Pearson TypeⅢ）法。然而在頻率分析、尚有周文德（V.T.Chow）法，常態分佈法、Gumbel 極端（最大）值法和角屋氏極端值分佈法等均未加以詳述，有點遺憾。因此本文擬補充前文不足之處並且舉出一案例，以各種不同的頻率分析方法求解。選用任一頻率分析方法是仰賴使用者之智慧與經驗作合理之判斷。本文僅提供一些實用之方法，希望對從事水利工程實務者適當掌握與運用之參考。

二、暴雨量資料頻率分析之理論剖析

筆者曾在「水利會訊」第九期討論過海生法及對數皮爾森第三型法，因

為還有其他統計方法想在本文中一併加以討論，首先定義復現期，復現期為等於或大於某 X 值可能發生之平均年數或稱超越頻率。令水文資料 X 之機率密度函數為 $p(x)$，則其超越頻率為

$P(x \geq \bar{X}) = \int_x^{\infty} p(x)dx$ 是為 T 年發生一次時　$P(x \geq \bar{X}) = \frac{1}{T}$

$$\therefore T = \frac{1}{P(x \geq \bar{X})} = \frac{1}{1 - P(x \leq X)} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \text{（1）}$$

所謂復現期，並非等時段內一定會發生，例如 20 年發生一次的洪水（其機率為 5% ），可能第一年發生二次後，39 年內不會發生，或數十年未發生後，連續再發生幾次，祇是在某長時期內，其發生次數為總年數之 1/20（例如 100 年內發生 5 次)。此洪水量每年都有發生之可能，祇是發生機率僅有 5 % 而已。

水文資料之頻率（發生次數）曲線通常以非對稱（非常態）分佈者較多，因此如何找出恰好能代表此水文資料之非對稱分佈之數學公式，以推定超越頻率下之變數發生值，為水文統計之一大研究項目。

分佈型之研究大別為二類：①設法使其常態化（正規化)，以利用常態分佈之特性者。②直接利用非對稱（或偏差）分佈函數者。前者有對數常態，幾次根常態，經驗分佈函數之直接常態化等方法，後者有利用指數型分佈，γ（gamma）函數，極端值分佈等，也有把前、後者混合利用者。

茲列出常用各種頻率分佈型及計算法如下：

1. 常態分佈（Normal Distribution）

常態分佈為對稱、鐘型之連續分佈，為一種理論分佈，係根據若干假設而用數字演繹推出者。其機率密度可用下式表示。

$$p(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-(x-\mu)^2/2\sigma^2} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \text{（2）}$$

式中 x：變數　　　μ：變數之平均值　　σ：標準差

等於或小於 X 之累積機率值為

$$P(x \le X) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{X} e^{-(x-\mu)^2/2\sigma^2}dx \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots（3）$$

如某一群數值之分佈合於（或假定為）常態分佈，如知其平均數及標準差之值，則可依照上述常態機率曲線之方程式確定某一數據值佔總數之百分比，或介於某二數間之數值佔總數之百分比。但直接解方程式非常麻煩，通常都藉用已算好標準常態曲線之數值計算。

茲列出標準（正規）常態曲線之作法（原理）如下：

令 $Z = \dfrac{x_1 - \mu}{\sigma}$　　　$\phi(Z) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{Z^2}{2}}$ $\cdots\cdots\cdots\cdots$（4）

式中 Z 為連續之標準變數（Standard variable），範圍可自 -∞ 變至 +∞。ϕ（Z）為標準常態曲線 ϕ（Z）在變數 Z 上之高度，亦即標準常態曲線上之縱座標。

表 1 為平均值 0，標準偏差 1 時，變數 Z 之常態分佈表，也就是自 Z＝0 至 Z 之常態分佈曲線下之面積，即發生機率表。

表 1　標準型常態分佈面積表

$$A=\int_0^Z \phi(Z)dZ=\int_0^Z \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{Z^2}{2}dZ}$$

表中之數字為 Z=0 至 Z 為某一正值為止之曲線下之部分面積。Z 為某一負值時，可以利用其對稱性求解。

Z	.00	.01	.02	.03	.04	.05	.06	.07	.08	.09
0.0	0.0000	0.0040	0.0080	0.0120	0.0160	0.0199	0.0239	0.0279	0.0319	0.0359
0.1	0.0398	0.0438	0.0478	0.0517	0.0557	0.0596	0.0636	0.0675	0.0714	0.0753
0.2	0.0793	0.0832	0.0871	0.0910	0.0948	0.0987	0.1026	0.1064	0.1103	0.1141
0.3	0.1179	0.1217	0.1255	0.1293	0.1331	0.1368	0.1406	0.1443	0.1480	0.1517
0.4	0.1554	0.1591	0.1628	0.1664	0.1700	0.1736	0.1772	0.1808	0.1844	0.1879
0.5	0.1915	0.1950	0.1985	0.2019	0.2054	0.2088	0.2123	0.2157	0.2190	0.2224
0.6	0.2257	0.2291	0.2324	0.2357	0.2389	0.2422	0.2454	0.2486	0.2517	0.2549
0.7	0.2580	0.2611	0.2642	0.2673	0.2703	0.2734	0.2764	0.2794	0.2823	0.2852
0.8	0.2881	0.2910	0.2939	0.2967	0.2995	0.3023	0.3051	0.3078	0.3106	0.3133
0.9	0.3159	0.3186	0.3212	0.3238	0.3264	0.3289	0.3315	0.3340	0.3365	0.3389
1.0	0.3413	0.3438	0.3461	0.3485	0.3508	0.3531	0.3554	0.3577	0.3599	0.3621
1.1	0.3643	0.3665	0.3686	0.3708	0.3729	0.3749	0.3770	0.3790	0.3810	0.3830
1.2	0.3849	0.3869	0.3888	0.3907	0.3925	0.3944	0.3962	0.3980	0.3997	0.4015
1.3	0.4032	0.4049	0.4066	0.4082	0.4099	0.4115	0.4131	0.4147	0.4162	0.4177
1.4	0.4192	0.4207	0.4222	0.4236	0.4251	0.4265	0.4279	0.4292	0.4306	0.4319
1.5	0.4332	0.4345	0.4357	0.4370	0.4382	0.4394	0.4406	0.4418	0.4429	0.4441
1.6	0.4452	0.4463	0.4474	0.4484	0.4495	0.4505	0.4515	0.4525	0.4535	0.4545
1.7	0.4554	0.4564	0.4573	0.4582	0.4591	0.4599	0.4608	0.4616	0.4625	0.4633
1.8	0.4641	0.4649	0.4656	0.4664	0.4671	0.4678	0.4686	0.4693	0.4699	0.4706
1.9	0.4713	0.4719	0.4726	0.4732	0.4738	0.4744	0.4750	0.4756	0.4761	0.4767
2.0	0.4772	0.4778	0.4783	0.4788	0.4793	0.4798	0.4803	0.4808	0.4812	0.4817
2.1	0.4821	0.4826	0.4830	0.4834	0.4838	0.4842	0.4846	0.4850	0.4854	0.4857
2.2	0.4861	0.4864	0.4868	0.4871	0.4875	0.4878	0.4881	0.4884	0.4887	0.4890
2.3	0.4893	0.4896	0.4898	0.4901	0.4904	0.4906	0.4909	0.4911	0.4913	0.4916
2.4	0.4918	0.4920	0.4922	0.4925	0.4927	0.4929	0.4931	0.4932	0.4934	0.4936
2.5	0.4938	0.4940	0.4941	0.4943	0.4945	0.4946	0.4948	0.4949	0.4952	0.4952
2.6	0.4953	0.4955	0.4956	0.4957	0.4959	0.4960	0.4961	0.4962	0.4963	0.4964
2.7	0.4965	0.4966	0.4967	0.4968	0.4969	0.4970	0.4971	0.4972	0.4973	0.4974
2.8	0.4974	0.4975	0.4976	0.4977	0.4977	0.4978	0.4979	0.4979	0.4980	0.4981
2.9	0.4981	0.4982	0.4982	0.4983	0.4984	0.4984	0.4985	0.4985	0.4986	0.4986
3.0	0.4987	0.4987	0.4987	0.4988	0.4988	0.4989	0.4989	0.4989	0.4990	0.4990

2. 對數常態分佈（Lognormal Distribution）

水文資料之頻率曲線，通常以非對稱分佈者較多，但變數 x 改用對數座標後，即可近似地變成常態分佈，故稱為對數常態分佈一般所用（例如岩井法）之型式為式（2）以 $\sigma_y=\frac{1}{\sqrt{2}}$，$\mu_y=0$ 加以變數變換，故可得：

$$P(y)=\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{y}e^{-y^2}dy \quad \text{......（5）}$$

$$y=k\log_e\frac{x+b}{x_0+b}=a\log_{10}\frac{x+b}{x_0+b}\text{，}-b<x<\infty \quad \text{......（6）}$$

式中 $a=k\log e$、k、b、x_0 均為常數。

3. Log-Pearson Type Ⅲ法

Log-Pearson Type Ⅲ法乃美國最常用之方法，為 H. A. Forste 於 1924 年所提倡之 Pearson Type Ⅲ法中，以對數值替代自然值（水文資料）者，故稱之 Log-Pearson Type Ⅲ法，概述如下：

令 $x_i=\log_{10}Y_i$ ......（7）

即 $M=\frac{\sum x_i}{N}$ ......（8）

$$S=\sqrt{\frac{\sum(x_i-M)^2}{N-1}} \quad \text{......（9）}$$

$$G=\frac{N\sum(x_i-M)^3}{(N-1)(N-2)S^3} \quad \text{......（10）}$$

式中： Y1＝樣本值　N＝樣本總數　M＝平均值

S＝標準差　G＝偏差係數

根據 G 值，查不同復現 T（或機率 P）之 K 值如表 2 所示，代入式（11），換算成自然直即可。

表 2　對數-皮爾森第三型頻率分析的頻率因子 K 值

偏態係數 G	迴歸週期 T（年）										
	1.0101	1.0526	1.1111	1.2500	2	5	10	25	50	100	200
	發生機率（%）										
	99	95	90	80	50	20	10	4	2	1	0.5
3.0	-0.667	-0.665	-0.660	-0.636	-0.396	0.420	1.180	2.278	3.152	4.051	4.970
2.9	-0.690	-0.688	-0.681	-0.651	-0.390	0.440	1.195	2.277	3.134	4.013	4.909
2.8	-0.714	-0.711	-0.702	-0.666	-0.384	0.460	1.210	2.275	3.114	3.973	4.847
2.7	-0.740	-0.736	-0.724	-0.681	-0.376	0.479	1.224	2.272	3.093	3.932	4.783
2.6	-0.769	-0.762	-0.747	-0.696	-0.368	0.499	1.238	2.267	3.071	3.889	4.718
2.5	-0.799	-0.790	-0.771	-0.711	-0.360	0.518	1.250	2.262	3.048	3.845	4.652
2.4	-0.832	-0.819	-0.795	-0.725	-0.351	0.537	1.262	2.256	3.023	3.800	4.584
2.3	-0.867	-0.850	-0.819	-0.739	-0.341	0.555	1.274	2.248	2.997	3.753	4.515
2.2	-0.905	-0.882	-0.844	-0.752	-0.330	0.574	1.284	2.240	2.970	3.705	4.444
2.1	-0.946	-0.914	-0.869	-0.765	-0.319	0.592	1.294	2.230	2.942	3.656	4.372
2.0	-0.990	-0.949	-0.895	-0.777	-0.307	0.609	1.302	2.219	2.912	3.605	4.298
1.9	-1.037	-0.984	-0.920	-0.788	-0.294	0.627	1.310	2.207	2.881	3.553	4.223
1.8	-1.087	-1.020	-0.945	-0.799	-0.282	0.643	1.318	2.193	2.848	3.499	4.147
1.7	-1.140	-1.056	-0.970	-0.808	-0.268	0.660	1.324	2.179	2.815	3.444	4.069
1.6	-1.197	-1.093	-0.994	-0.817	-0.254	0.675	1.329	2.163	2.780	3.388	3.990
1.5	-1.256	-1.131	-1.018	-0.825	-0.240	0.690	1.333	2.146	2.743	3.330	3.910
1.4	-1.318	-1.168	-1.041	-0.832	-0.225	0.705	1.337	2.128	2.706	3.271	3.828
1.3	-1.383	-1.206	-1.064	-0.838	-0.210	0.719	1.339	2.108	2.666	3.211	3.745
1.2	-1.449	-1.243	-1.086	-0.844	-0.195	0.732	1.340	2.087	2.626	3.149	3.661
1.1	-1.518	-1.280	-1.107	-0.848	-0.180	0.745	1.341	2.066	2.585	3.087	3.575
1.0	-1.588	-1.317	-1.128	-0.852	-0.164	0.758	1.340	2.043	2.542	3.022	3.489
0.9	-1.660	-1.353	-1.147	-0.854	-0.148	0.769	1.3339	2.018	2.498	2.957	3.401
0.8	-1.733	-1.388	-1.166	-0.856	-0.132	0.780	1.336	1.993	2.453	2.891	3.312
0.7	-1.806	-1.423	-1.183	-0.857	-0.116	0.790	1.333	1.967	2.407	2.824	3.223
0.6	-1.880	-1458	-1.200	-0.857	-0.099	0.800	1.328	1.939	2.359	2.755	3.132
0.5	-1.955	-1.491	-1.216	-0.856	-0.083	0.808	1.323	1.910	2.311	2.686	3.041
0.4	-2.029	-1.524	-1.231	-0.855	-0.066	0.816	1.317	1.880	2.261	2.615	2.949
0.3	-2.104	-1.555	-1.245	-0.853	-0.050	0.824	1.309	1.849	2.211	2.544	2.856
0.2	-2.178	-2.586	-1.258	-0.850	-0.033	0.830	1.301	1.818	2.159	2.472	2.763
0.1	-2.252	-1.616	-1.270	-0.846	-0.017	0.836	1.292	1.785	2.107	2.400	2.670
0	-2.326	-1.645	-1.282	-0.842	0	0.842	1.282	2.054	2.054	2.326	2.576

表２　對數-皮爾森第三型頻率分析的頻率因子Ｋ值（續）

偏態係數 G	迴歸週期T（年）										
	1.0101	1.0526	1.1111	1.2500	2	5	10	25	50	100	200
	發生機率（%）										
	99	95	90	80	50	20	10	4	2	1	0.5
0	-2.326	-1.645	-1.282	-0.842	0.	0.842	1.282	1.751	2.054	2.326	2.576
-0.1	-2.400	-1.673	-1.292	-0.836	0.017	0.846	1.270	1.716	2.000	2.252	2.482
-0.2	-2.472	-1.700	-1.301	-0.830	0.033	0.850	1.258	1.680	1.945	2.178	2.388
-0.3	-2.544	-1.726	-1.309	-0.824	0.050	0.853	1.245	1.643	1.890	2.104	2.294
-0.4	-2.615	-1.750	-1.317	-0.816	0.066	0.855	1.231	1.606	1.834	2.029	2.201
-0.5	-2.686	-1.774	-1.323	-0.808	0.083	0.856	1.216	1.567	1.777	1.955	2.108
-0.6	-2.755	-1.797	-1.328	-0.800	0.099	0.857	1.200	1.528	1.720	1.880	2.016
-0.7	-2.824	-1.819	-1.333	-0.790	0.116	0.857	1.183	1.488	1.663	1.806	1.926
-0.8	-2.891	-1.839	-1.336	-0.780	0.132	0.856	1.166	1.448	1.606	1.733	1.837
-0.9	-2.957	-1.858	-1.339	-0.769	0.148	0.854	1.147	1.407	1.549	1.660	1.749
-1.0	-3.022	-1.877	-1.340	-0.758	0.164	0.852	1.128	1.366	1.492	1.588	1.664
-1.1	-3.087	-1.894	-1.341	-0.745	0.180	0.848	1.107	1.324	1.435	1.518	1.581
-1.2	-3.149	-1.910	-1.340	-0.732	0.195	0.844	1.086	1.282	1.379	1.449	1.501
-1.3	-3.211	-1.925	-1.339	-0.719	0.210	0.838	1.064	1.240	1.324	1.383	1.424
-1.4	-3.271	-1.938	-1.337	-0.705	0.225	0.832	1.041	1.198	1.270	1.318	1.351
-1.5	-3.330	-1.951	-1.333	-0.690	0.240	0.825	1.018	1.157	1.217	1.256	1.282
-1.6	-3.388	-1.962	-1.329	-0.675	0.254	0.817	0.994	1.116	1.160	1.197	1.216
-1.7	-3.444	-1.972	-1.324	-0.660	0.268	0.808	0.970	1.075	1.116	1.140	1.155
-1.8	-3.499	-1.981	-1.318	-0.643	0.282	0.799	0.945	1.035	1.069	1.087	1.097
-1.9	-3.553	-1.989	-1.310	-0.627	0.294	0.788	0.920	0.996	1.023	1.037	1.044
-2.0	-3.605	-1.996	-1.302	-0.609	0.307	0.777	0.895	0.959	0.980	0.990	0.995
-2.1	-3.656	-2.001	-1.294	-0.592	0.319	0.765	0.869	0.923	0.939	0.946	0.949
-2.2	-3.705	-2.006	-1.284	-0.574	0.330	0.752	0.844	0.888	0.900	0.905	0.907
-2.3	-3.753	-2.009	-1.274	-0.555	0.341	0.739	0.819	0.855	0.864	0.867	0.869
-2.4	-3.800	-2.011	-1.262	-0.537	0.351	0.725	0.795	0.823	0.830	0.832	0.833
-2.5	-3.845	-2.012	-1.250	-0.518	0.360	0.711	0.771	0.793	0.798	0.799	0.800
-2.6	-3.889	-2.013	-1.238	-0.499	0.368	0.696	0.747	0.764	0.768	0.769	0.769
-2.7	-3.932	-2.012	-1.224	-0.479	0.376	0.681	0.724	0.738	0.740	0.740	0.741
-2.8	-3.973	-2.010	-1.210	-0.460	0.384	0.666	0.702	0.712	0.714	0.714	0.714
-.29	-4.013	-2.007	-1.195	-0.440	0.390	0.651	0.681	0.683	0.689	0.690	0.690
-3.0	-4.051	-2.003	-1.180	-0.420	0.396	0.636	0.660	0.666	0.666	0.667	0.667

$\log_{10} Y = M + KS$ .... （11）

式中，K：偏差因子

其缺點是如有特別小的樣本（尤其小於 1 以下）時，會影響理論曲線很大。或log 0＝-∞，根本無法計算。後者之補救方法為：(1) 各項均加極小數值，(2) 以非 0 樣本計算機率，再調整成整系列者，(3) 分成兩部份計算，如令 Z 為發生 0 之樣本佔總樣本 N 之百分率，則以 1-Z 作為非 0 樣本之發生機率範圍作分析，使其各樣本之發生機率分佈在該範圍內，發生 0 之樣本之平均機率為 Z/100。

4. 極端值（極大）分佈（Extremal (Maxima) Distribution）

有三種型式，本文僅列出其中第一型分佈（Type I Distribution）。由於此分佈係以 Gumbel 極大值分佈聞名，故亦稱 Gumbel 分佈。

$P(y) = \exp\left(-e^{-y}\right) \qquad -\infty < y < \infty$ .... （12）

式中：$y = a(x - x_0)$

$a = \sigma_y / \sigma_x$

$x_0 = m_x - m_y / a$

σ_y，σ_x：全體標準差

m_y，m_x：全體平均值

由於水文統計所使用的資料頗為有限，大都在 100 年以下，因此 $m_y \le \gamma = 0.5772$，$\sigma_y \le \pi/\sqrt{6}$，所以祇要採用標本統計量 $\bar{x}$，S_x 必須考慮對應樣本數 N 之 $\bar{y}$、S_y 值，用該值後，其未知數 a、x_0 可由下式推定。

$\frac{1}{a} = \frac{S_x}{S_y}$ .... （13）

$x_0 = \bar{x} - (\frac{1}{a})\bar{y}$ .... （14）

Gumble 氏經過若干研討演算後，利用 Thomas plot 得出：

$$P(y_i) \equiv \exp(-e^{-y_i}) = i/(N+1) \text{ .... } \quad (15)$$

y_i 就可用 N 與 i 之函數來代表之性質，求出不同 N 時之 $\overline{y}$ ，S_r 值如表 3 所示，而復現期 T 與 p(x)及變數 y 之關係如表 4 所示。日本人角屋氏認為欲使常數之推定誤差值為最小，應考慮用最小二乘方（Least square method）為極小值，由此提出不同 N 時之 $\overline{y}$ ，S_r 如表 5 所示。

表 3　Gumbel 分佈常數表（Gumbel 法）

N	$\overline{y}$	S_y	N	$\overline{y}$	S_y	N	$\overline{y}$	S_y
15	0.5128	1.0206	37	0.5417	1.1339	59	0.5518	1.1734
16	57	316	38	24	363	60	21	747
17	81	411	39	30	388	62	27	770
18	0.5202	493	40	0.5436	1.1413	64	33	793
19	20	565	41	42	436	66	38	814
20	0.5236	1.0633	42	48	458	68	43	834
21	52	696	43	53	480	70	0.5548	1.1854
22	68	754	44	58	499	72	53	873
23	83	811	45	0.5463	1.1519	74	57	890
24	96	864	46	68	538	76	61	906
25	0.5308	915	47	73	557	78	65	923
26	20	961	48	77	574	80	0.5569	1.1938
27	32	1.1004	49	81	590	82	72	953
28	43	047	50	0.5485	1.1607	84	76	967
29	53	086	51	89	623	86	80	980
30	0.5362	1.1124	52	93	638	88	83	994
31	71	159	53	97	653	90	0.5586	1.2007
32	80	193	54	0.5501	667	92	89	020
33	88	226	55	04	881	94	92	032
34	96	255	56	08	696	96	95	044
35	0.5403	285	57	11	708	98	98	055
36	10	313	58	15	721	100	0.5600	065

表 4　Gumbel 極端值變數 y，P（x），T（x）關係表

T(x)	P(x)%	y	T(x)	P(x)%	y
500	0.200	6.21361	25	4.000	3.19583
400	0.250	5.99021	20	5.000	2.97020
300	0.333	5.70212	15	6.667	2.67375
250	0.400	5.51946	10	10.000	2.25037
200	0.500	5.29581	8	12.500	2.01342
150	0.667	5.00730	7	14.286	1.86982
100	1.000	4.60015	6	16.667	1.70199
80	1.250	4.37574	5	20.000	1.49994
60	1.667	4.08596	4	25.000	1.24590
50	2.000	3.90194	3	33.000	0.90273
40	2.500	3.67625	2	50.000	0.36651
30	3.333	3.38429	1	63.212	0

表 5　Gumbel 分佈常數表（角屋氏法）

N	$\bar{y}$	S_y	N	$\bar{y}$	S_y	N	$\bar{y}$	S_y
20	0.5692	1.1825	40	0.5717	1.2244	60	0.5729	1.2402
22	96	895	42	18	266	62	30	413
24	99	956	44	20	287	64	31	423
26	0.5702	1.2009	46	21	306	66	32	433
28	05	055	48	23	323	68	33	442
30	0.5707	1.2095	50	0.5724	1.2338	70	0.5734	1.2451
32	09	130	52	25	352	75	36	472
34	11	162	54	26	366	80	37	490
36	13	192	56	27	379	85	39	506
38	15	219	58	28	391	90	40	520
						95	41	532
						100	42	542

5. 海生(Hazen)法

日降雨量之頻率（即發生次數）分佈較屬常態分佈，但年最大降雨量之頻率分佈通常有偏差（Skewness）不對稱現象，因此 Hazen 首先提倡對數常態機率紙及其分析方法。本法為本省最常用之方法，其計算方法為：

$$X = \overline{X}(1 + C.S. \cdot CV) \qquad (16)$$

式中 CV 為變異係數　$\overline{X}$=樣本之平均值　$C.S.$=Hazen 偏差係數

計算理論頻率曲線時要根據 Hazen 偏差係數表（如表 6 所示）。該表原由經驗所得，後被發現不正確。周文德曾根據數學演算求出相對應於該表之正確數值表（如附表 7 所示）。

本法之點繪位置，必須採用 $p = \frac{2m-1}{2N}$ 公式，海生機率值座標繪製，詳見水利會訊第 9 期，頁 96-97。

6. 周文德（Chow）法

隨機（Random）水文系列之變數 X 通常可用平均值 $\overline{X} \approx \mu$ 及偏差 ΔX 之和表示，如下：

$$X = \overline{X} + \Delta X = \overline{X} + \sigma K \qquad (17)$$

或 $$\frac{X}{\overline{X}} = 1 + C_S K \qquad (18)$$

頻率因子（Frequency factor）K 與再發生年 T 有關。周式求出 Type I 極端值分佈之理論 K 與 T 關係公式如下：

$$K = -\frac{\sqrt{6}}{\pi}\left[r + L_n L_n\left(\frac{T}{T-1}\right)\right] \qquad (19)$$

式中：γ＝0.5772 .... Eular constant

$l_n X = \log_e X = 2.302585 \log_{10} X$

表 8 示各復現期（T）與頻率因子之關係。

表 6 海生法的偏差因子推算值（$F=1+\frac{8.5}{n}$型）

偏差 係數（C.S.）	發生頻率（% ）									
	99	95	80	50	20	10	5	1	0.1	0.01
	-	-	-	-	+	+	+	+	+	+
	復現期（年）									
	1.01	1.05	1.25	2	5	10	20	100	1000	10000
0	2.32	1.64	0.85	0	0.84	1.26	1.64	2.32	3.09	3.72
0.1	2.25	1.62	0.85	0.02	0.84	1.26	1.67	2.40	3.24	3.96
0.2	2.18	1.59	0.85	0.03	0.83	1.27	1.71	2.48	3.39	4.20
0.3	2.12	1.56	0.85	0.05	0.83	1.28	1.74	2.56	3.55	4.45
0.4	2.05	1.53	0.85	0.08	0.82	1.29	1.76	2.64	3.72	4.72
0.5	1.99	1.50	0.85	0.08	0.82	1.29	1.79	2.72	3.90	5.00
0.6	1.92	1.47	0.85	0.09	0.81	1.29	1.81	2.80	4.08	5.30
0.7	1.86	1.44	0.85	0.11	0.80	1.30	1.84	2.89	4.28	5.64
0.8	1.80	1.41	0.85	0.12	0.79	1.30	1.86	2.97	4.48	6.00
0.9	1.73	1.38	0.85	0.14	0.77	1.30	1.88	3.06	4.69	6.37
1.0	1.68	1.34	0.84	0.15	0.76	1.30	1.90	3.15	4.92	6.77
1.1	1.62	1.31	0.84	0.17	0.75	1.29	1.92	3.24	5.16	7.23
1.2	1.56	1.28	0.83	0.18	0.74	1.28	1.94	3.33	5.40	7.66
1.3	1.51	1.25	0.83	0.19	0.72	1.27	1.96	3.41	5.64	8.16
1.4	1.46	1.22	0.82	0.2	0.71	1.27	1.98	3.50	5.91	8.66
1.5	1.41	1.19	0.81	0.22	0.69	1.26	1.99	3.59	6.18	9.16
1.6	1.60	1.16	0.81	0.23	0.67	1.26	2.01	3.69	6.48	9.79
1.7	1.32	1.13	0.80	0.24	0.66	1.25	2.02	3.78	6.77	10.40
1.8	1.27	1.10	0.79	0.25	0.64	1.25	2.03	3.88	7.09	11.1
1.9	1.23	1.07	0.78	0.26	0.62	1.24	2.04	3.98	7.42	11.8
2.0	1.19	1.05	0.77	0.27	0.61	1.24	2.05	4.07	7.78	12.60
2.1	1.15	1.02	0.76	0.28	0.59	1.24	2.06	4.17	8.13	13.4
2.2	1.11	0.99	0.75	0.29	0.57	1.24	2.07	4.27	8.54	14.30
2.3	1.07	0.96	0.74	0.3	0.55	1.23	2.70	4.37	9.35	15.3
2.4	1.03	0.94	0.73	0.31	0.53	1.23	2.08	4.48	9.75	
2.5	1.00	0.91	0.72	0.31	0.51	1.22	2.08	4.58	10.2	
2.6	0.97	0.89	0.71	0.32	0.49	1.22	2.09	4.68	10.7	
2.7	0.94	0.86	0.69	0.33	0.47	1.22	2.09	4.78	11.20	
2.8	0.91	0.84	0.68	0.33	0.45	1.21	2.09	4.89	11.8	
2.9	0.87	0.82	0.67	0.34	0.43	1.21	2.09	5.01	12.30	
3.0	0.84	0.79	0.66	0.34	0.41	1.20	2.08	5.11	13.50	
3.2	0.78	0.74	0.64	0.35	0.37	1.18	2.06	5.35		
3.4	0.73	0.69	0.61	0.36	0.32	1.15	2.04	5.58		
3.6	0.67	0.65	0.58	0.36	0.28	1.12	2.02	5.80		
3.8	0.62	0.61	0.55	0.36	0.23	1.10	1.98	6.10		
4.0	0.58	0.56	0.52	0.36	0.19	1.05	1.95	6.50		
4.5	0.43	0.47	0.45	0.35	0.10	1.03	1.79	7.30		
5.0	0.40	0.40	0.39	0.34	0	1.00	1.60	8.20		

表 7　對數常態分佈頻率因子表（Chow）

C_S	於中值之機率	機率百分率，等於或大於所示變數									相應 $C.S.$
		99	95	80	50	20	5	1	0.1	0.01	
		－	－	－	－	＋	＋	＋	＋	＋	
0.0	50.0	2.33	1.65	0.84	0	0.84	1.64	2.33	3.09	3.72	0
0.1	49.3	2.25	1.62	0.85	0.02	0.84	1.67	2.40	3.22	3.95	0.033
0.2	48.7	2.18	1.59	0.85	0.04	0.83	1.70	2.47	3.39	4.18	0.067
0.3	48.0	2.11	1.56	0.85	0.06	0.82	1.72	2.55	3.56	4.42	0.100
0.4	47.3	2.04	1.53	0.85	0.07	0.81	1.75	2.62	3.72	4.70	0.136
0.5	46.7	1.98	1.49	0.86	0.09	0.80	1.77	2.70	3.88	4.96	0.166
0.6	46.1	1.91	1.46	0.85	0.10	0.79	1.79	2.77	4.05	5.24	0.197
0.7	45.5	1.85	1.43	0.85	0.11	0.78	1.81	2.84	4.21	5.52	0.230
0.8	44.9	1.79	1.40	0.84	0.13	0.77	1.82	2.90	4.37	5.81	0.262
0.9	44.2	1.74	1.37	0.84	0.14	0.76	1.84	2.97	4.55	6.11	0.292
1.0	43.7	1.68	1.34	0.84	0.15	0.75	1.85	3.03	4.72	6.40	0.324
1.1	43.2	1.63	1.31	0.83	0.16	0.73	1.86	3.09	4.87	6.71	0.351
1.2	42.7	1.58	1.29	0.82	0.17	0.72	1.87	3.15	5.04	7.02	0.381
1.3	42.2	1.54	1.26	0.82	0.18	0.71	1.88	3.21	5.19	7.31	0.409
1.4	41.7	1.49	1.23	0.81	0.19	0.69	1.88	3.26	5.35	7.62	0.436
1.5	41.3	1.45	1.21	0.81	0.20	0.68	1.89	3.31	5.51	7.92	0.462
1.6	40.8	1.41	1.18	0.80	0.21	0.67	1.89	3.36	5.66	8.26	0.490
1.7	40.4	1.38	1.16	0.79	0.22	0.65	1.89	3.40	5.80	8.58	0.517
1.8	40.0	1.34	1.14	0.78	0.22	0.64	1.89	3.44	5.96	8.88	0.544
1.9	39.6	1.31	1.12	0.78	0.23	0.63	1.89	3.48	6.10	9.20	0.570
2.0	39.2	1.28	1.10	0.77	0.24	0.61	1.89	3.52	6.25	9.51	0.596
2.1	38.8	1.25	1.08	0.76	0.24	0.60	1.89	3.55	6.39	9.79	0.620
2.2	38.4	1.22	1.06	0.76	0.25	0.59	1.89	3.59	6.51	10.12	0.643
2.3	38.1	1.20	1.04	0.75	0.25	0.58	1.88	3.62	6.65	10.43	0.667
2.4	37.7	1.17	1.02	0.74	0.26	0.57	1.88	3.65	6.77	10.72	0.691
2.5	37.4	1.15	1.00	0.74	0.26	0.56	1.88	3.67	6.90	10.95	0.713
2.6	37.1	1.12	0.99	0.73	0.26	0.55	1.87	3.70	7.02	11.25	0.734
2.7	36.8	1.10	0.97	0.72	0.27	0.54	1.87	3.72	7.13	11.55	0.755
2.8	36.6	1.08	0.96	0.72	0.27	0.53	1.86	3.74	7.25	11.80	0.776
2.9	36.3	1.06	0.95	0.71	0.27	0.52	1.86	3.76	7.36	12.10	0.796
3.0	36.0	1.04	0.93	0.71	0.28	0.51	1.85	3.78	7.47	12.36	0.818
3.2	35.5	1.01	0.90	0.69	0.28	0.49	1.84	3.81	7.65	12.85	0.857
3.4	35.1	0.98	0.88	0.68	0.29	0.47	1.83	3.84	7.84	13.36	0.895
3.6	34.7	0.95	0.86	0.67	0.29	0.46	1.81	3.87	8.00	13.83	0.930
3.8	34.2	0.92	0.84	0.66	0.29	0.44	1.80	3.89	8.16	13.23	0.966
4.0	33.9	0.90	0.82	0.65	0.29	0.42	1.78	3.91	8.30	14.70	1.000
4.5	33.0	0.84	0.78	0.63	0.30	0.39	1.75	3.93	8.60	15.62	1.081
5.0	32.3	0.80	0.74	0.62	0.30	0.37	1.71	3.95	8.86	16.45	1.155

註：本表相當於表 6 對數偏差曲線係數表（Hazen 法）

表 8　各復現期 T 與頻率因子 K 之關係

T	K
1,000	4.9355
200	3.6791
100	3.1367
50	2.5914
40	2.4163
20	1.8658
10	1.3046
5	0.7195
2	0.1643

三、暴雨量頻率分析的範例解析

本文列舉六種實用之頻率方法計算例說明如下：

1. 對數-皮爾森第三型暴雨頻率分析法

對數-皮爾森第三型分佈法（Log-Pearson Type Ⅲ distribution）為 1967 年美國水資源委員會修正皮爾森第三型法，將變數先取對數，再用皮爾森第三型分析水文頻率，此法考慮平均數，標準偏差及偏度等三個統計參數，為最具有彈性與可靠度高之方法，適用於暴雨量頻率之推估，因其簡便正確，所以一般廣受採用。本法是美國工程師團（U.S. corps of Engineers）所習用之方法，當偏差係數 G=0 時，此法與對數常態分析法相同。

對數-皮爾森第三型水文頻率分析公式可表示為：

log Y=M+KS，式中 M：平均值；Y：年雨量，月雨量，三日暴雨量，年最大雨量等；K：頻率因子，為復現期 T 及機率分佈之函數；而 S：水文資料之標準偏差。

表 9 為暴雨頻率計算範例（利用 Log-Pearson Type Ⅲ分佈法）其計算程序說明如下：

（1） 自連續N年記錄中選出欲計算對象數值Yi(例如年雨量、月雨量、三日暴雨量、年最大洪水量…等)，如表中第（2）欄。

（2） Yi值按大小順序重排，如表中第(4)欄所示點繪位置有「以P=50%軸為準，左右對稱」之特性。

（3） 點繪位置係採用Beard分析法 $P_1 = 1 - 0.5^{1/N}$ ，$N = 18$（18年暴雨記錄） 求得最大值為 $P_1 = 3.78\%$。而以 $P_N = 1 - P_1$，求出最小值為 $P_{18} = 96.2\%$。其餘各值可參照 N 值，以等間隔分配，例如：

$$P_2 = 3.75 + \frac{96.2 - 3.78}{18 - 1} \times 1 = 9.2$$

$$P_3 = 3.78 + \frac{96.2 - 3.78}{18 - 1} \times 2 = 14.7 \cdots\cdots P_{16} = 85.3 \quad P_{17} = 90.8$$ 。

再將計算所得數據列於第（5）欄中。

（4） 取Yi值之對數值，並求其平均值M，如表中第（6）欄所示。

（5） 求各log Yi值與其平均值M之偏差數Xi，如表中之第（7）欄所示。

（6） 求 $X_i^{\,2}$ 如表中之第（8）欄。

（7） 求 $X_i^{\,3}$ 如表中之第（9）欄。

（8） 計算標準偏差（Standard deviation）S

$S = \sqrt{\dfrac{\sum Xi^2}{N-1}}$ 以本範例而言， $S = \sqrt{\dfrac{0.32783}{17}} = 0.13887$

（9） 計算偏差係數（Skew Coefficient）G

$$G = \frac{N\sum X^3}{(N-1)(N-2)S^3} \quad \text{...............（20）}$$

以本範例而言， $G = \dfrac{18 \times (-0.00325)}{17 \times 16 \times (0.13887)^3} = -0.08025$

(10) 列出復現期 T 如表中第（10）欄所示。

(11) 求發生頻率 P（% ），P=1/T 如表中第（11）欄所示。

(12) 根據計算所得 G 值，由表 2（K 值表）中之 T 欄，求出各復現期之 K 值，如 G 值不在表中之數據，例如 0.23 時，應自 G=0.2 及 G=0.3 欄，依內插法求得 G=0.23 時之 K 值，如是計算不同復現期之 K 值，如表中第（12）欄所示。

(13) 計算不同發生頻率之對數值變數值 logY=M+KS 如表中第（13）欄所示。

(14) 計算其反對數得 Y 值如表中第（14）欄所示。

(15) 將表中之第（10）欄或第（11）欄與相對之 Y 值（第 14 欄）畫成一直線，則可求出任意復現期下之暴雨量數據。

表 9　對數-皮爾森第Ⅲ型暴雨量頻率計算範例

(1) 年份	(2) 暴雨量 Y（一日暴雨）（㎜）	(3) 次序	(4) 暴雨量 Y 大小重排（㎜）	(5) 點繪位置（% ）	(6) Logy=m	(7) m-M=X	(8) X^2	(9) X^3	(10) 復現期（年）	(11) 發生頻率 P%	(12) K	(13) logY=M+KS	(14) Y ㎜
35	24.4	1	42.1	3.78	1.62428	0.23649	0.05593	0.01323	200	0.5	2.50008	1.73502	54.3
36	35.3	2	37.4	9.2	1.57287	0.18508	0.03426	0.00634	100	1.0	2.26715	1.70263	50.4
37	18.9	3	35.3	14.7	1.54777	0.15998	0.02559	0.00410	50	2.0	2.01040	1.66697	46.4
38	15.0	4	32.4	20.1	1.51054	0.12275	0.01507	0.00185					
39	15.2	5	32.1	25.5	1.50651	0.11872	0.01409	0.00167	25	4	1.744	1.62999	42.7
40	20.2	6	29.5	31.0	1.46982	0.08203	0.00673	0.00055	10	10	1.27258	1.56451	36.7
41	27.5	7	28.2	36.4	1.45025	0.06246	0.00390	0.00024	5	20	0.84524	1.50517	32.0
42	37.4	8	27.5	41.8	1.43933	0.05154	0.00266	0.00014					
43	18.4	9	25.1	47.3	1.39967	0.01188	0.00014	0	2	50	0.01334	1.38964	24.5
44	29.5	10	24.4	52.7	1.38739	-0.00040	0	0	1.25	80	-0.83742	1.27150	18.7
45	15.1	11	22.9	58.2	1.35984	-0.02795	0.00078	-0.00002	1.01	99	-2.38514	1.05657	11.4
46	42.1	12	21.3	63.6	1.32838	-0.05941	0.00353	-0.00021					
47	28.2	13	20.2	69.0	1.30535	-0.08244	0.00680	-0.00056					
48	32.2	14	13.9	74.5	1.27646	-0.11133	0.01239	-0.00138					
49	22.9	15	18.4	79.9	1.26482	-0.12297	0.01512	-0.00186					
50	32.4	16	15.2	85.3	1.18184	-0.20595	0.04242	-0.00874					
51	21.3	17	15.1	90.8	1.17898	-0.20881	0.4360	-0.00911					
52	25.1	18	15.0	96.2	1.17609	-0.21170	0.04482	-0.00949					
					Σ=24.98019 M=1.38779		ΣX^2= 0.32783	ΣX^3= -0.00352					

2. 海生（Hazen）暴雨頻率分析法

海生氏法根據實測值，以變異係數（C.V.）及 Foster 之修正係數（F=1+8.5/n），計算偏差係數（C.S.）後查表 6 之偏差因子就可計算。

本法對記錄年份之長短係以 F 值加以修正，為其特色點。列舉範例說明其應用方法如下：

表 10 為某站自民國 35 年至民國 52 年之最大一日連續最大降雨量頻率統計表，其中各欄之意義及來源或計算法為：

第(1)欄：為位序。由 1、2、3…依次至 n（總觀測年數），由此可知記錄年數共有多少年。依大小順序排列之某位序（通常代表符號 m）之記錄值有多少。

第(2)欄：記錄年份，為民國 XX 年或西曆 YY 年。

第(3)欄：第(2)欄年份內所發生之最大日雨量值，可自實測資料中選出。

第(4)欄：第(3)欄數值按大小順序排列者，需計算其合計值及平均值。

第(5)欄：發生百分率，如以 P 為發生百分率，n 為記錄年數，m 代表位序，則可以下式計算。

$$P = \frac{2m-1}{2n} \times 100 \quad \text{..................} \quad (21)$$

如第一位序時 $P = \frac{2\times 1-1}{2\times 18} \times 100 = 2.78\%$

第二位序時 $P = \frac{2\times 2-1}{2\times 18} \times 100 = 8.33\%$

第(6)欄：復現期，即每若干年發生一次，可依下式計算，（或第(5)欄之倒數求得）

$$T = \frac{2n}{2m-1} \text{或} T = \frac{1}{P} \quad \text{...............} \quad (22)$$

如第一位序時　$T=\dfrac{2\times 18}{2\times 1-1}=36$，即 36 年發生一次暴雨量

第二位序時　$T=\dfrac{2\times 18}{2\times 2-1}=12$，即 12 年發生一次暴雨量

第(7)欄：與平均值之比值，為第(4)欄諸值除以平均值 25.6 公厘所得之數據。

第(8)欄：第(7)欄諸值減 1，若為負值則以負號表示。

第(9)欄：第(8)欄諸值之平方（二次方）值，均為正值，需求其合計值。

第(10)欄：第(8)欄諸值之立方（三次方）值，有正負值，需求其合計值。

第(11)欄：發生頻率，為便於繪製計算所得頻率曲線點，將其與復現期（發生一次之頻率）之關係是互為倒數$T=\dfrac{1}{P}$。

C.V.、F 及 C.S.之計算法說明如下：

變異係數$C.V.=\sqrt{\dfrac{\text{第(9)欄合計值}}{n-1}}$

海生法修正係數$F=1+\dfrac{8.5}{n}$

校正用偏差因子$C.S.=\dfrac{\text{第(10)欄合計值}\times \mathrm{F}}{(n-1)(C.V.)^3}$

如第(10)欄合計值為負值時，C.S.值必為負值，則 C.S.值可採用 0。

第(12)欄：偏差因子，為某一偏差係數 C.S.之偏差因子，可查表 3。查表時，計算之所得 C.S.值，對照表 3 中 C.S.欄中相當的數值。發生百分率大於 50% ，諸欄為負數。而其他諸欄為正數，需加正號。

如計算所得 C.S.值介在兩數值之間（如本例，C.S.=0.544，介在表中 C.S.欄 0.5 與 0.6 之間）時，需根據上下兩欄數值（如本例為 99% 情況下為-1.99 及-1.92），依內插法估計本例為（-1.96)，如計算結果 C.S.為負值時，可使用 C.S.=0 欄諸值。

第(13)欄：第(12)欄諸值乘以變異係數 C.V. 值。

第(14)欄：第(13)欄諸值加 1，相當於與平均值之比。

第(15)欄：第(14)欄乘以平均數，相當於諸值頻率下之降雨量。

表 10　暴雨頻率計算表（Hazen Method）

(1) 位序	(2) 民國（年）	(3) 最大日降雨量（mm）	(4) 大小順序（mm）	(5) 發生頻率（%）	(6) 復現期（年）	(7) 與平均值比值	(8) (7)－1	(9) $(8)^2$	(10) $(8)^3$	(11) 發生頻率（%）	(12) 偏差因子	(13) (12)×CV	(14) (13)+1	(15) (14)×平均值
1	35	24.4	42.1	2.78	36.00	1.644	0.644	0.415	0.267	99	−1.96	−0.617	0.383	9.8
2	36	35.3	37.4	8.33	12.00	1.461	0.461	0.213	0.098	95	−1.49	−0.469	0.531	13.6
3	37	18.9	35.3	13.89	7.20	1.379	0.379	0.144	0.054	80	−0.85	−0.268	0.732	18.7
4	38	15.0	32.4	19.44	5.14	1.265	0.265	0.070	0.019	50	−0.08	−0.025	0.975	25.0
5	39	15.2	32.1	25.00	4.00	1.254	0.254	0.065	0.016	20	+0.82	+0.258	1.258	32.2
6	40	20.2	29.5	30.56	3.27	1.152	0.152	0.023	0.003	10	+1.29	+0.406	1.406	36.0
7	41	27.5	28.2	36.11	2.77	1.101	0.101	0.010	0.001	5	+1.80	+0.567	1.567	40.1
8	42	37.4	27.5	41.67	2.40	1.074	0.074	0.005	0	2	+2.52	+0.794	1.794	45.9
9	43	18.4	25.1	47.22	2.12	0.980	−0.020	0	0	1	+2.76	+0.869	1.869	47.8
10	44	29.5	24.4	52.78	1.89	0.953	−0.047	0.002	0	0.5	+3.33	+1.050	2.050	52.5
11	45	15.1	22.9	58.33	1.71	0.894	−0.106	0.011	−0.001	0.1	+3.98	+1.254	2.254	57.7
12	46	42.1	21.3	63.89	1.57	0.832	−0.168	0.028	−0.005	$C.V.=\sqrt{\frac{\sum(9)\text{欄}}{n-1}}=\sqrt{\frac{1.683}{17}}=0.315$ $F=1+\frac{8.5}{n}=1+\frac{8.5}{15}=1.472$ $C.S.=\frac{\sum(10)\text{欄}\times F}{(n-1)\times(CV)^3}=\frac{0.196\times1.472}{17\times(0.315)^3}=0.544$				
13	47	28.2	20.2	69.44	1.44	0.789	−0.211	0.045	−0.009					
14	48	32.1	18.9	75.00	1.33	0.738	−0.262	0.069	−0.018					
15	49	22.9	18.4	80.56	1.24	0.719	−0.281	0.079	−0.022					
16	50	32.4	15.2	86.11	1.16	0.594	−0.406	0.165	−0.067					
17	51	21.3	15.1	91.67	1.09	0.590	−0.410	0.168	−0.069					
18	52	25.1	15.0	97.22	1.03	0.586	−0.414	0.171	−0.071					
			Σ＝461.0					1.638	+0.196					
			＝25.6											

3. Gumbel 極端值(最大值)分佈法及角屋極端值分佈法

（1）計算降雨量統計值如表 11 所示，得出：

$S_x=\sigma=8.059$，$\bar{x}=25.611$

（2）計算 Gumbel 分佈曲線公式

本案例 N=18 故可由表 3 Gumbel 分佈常數表求得 $\bar{y}=0.5202$ 及 $S_y=1.0493$

故 $\frac{1}{a}=\frac{S_x}{S_y}=\frac{8.059}{1.0493}=7.6804$

$$x_0 = \bar{x} - \frac{1}{a}\bar{y} = 25.611 - 7.6804 \times 0.5202 = 21.6$$

故 Gumbel 分佈曲線公式

$$x = x_0 + \frac{1}{a}y = 21.6 + 7.6804y \text{ ....} \quad (23)$$

表 11　降雨量統計分析

年份	降雨量 x	順位	按大小順位重排 x	X^2	X^3
35	24.4	1	15.0	225.00	3,375.000
36	35.3	2	15.1	228.01	3,442.951
37	18.9	3	15.2	231.04	3,511.808
38	15.0	4	18.4	338.56	6,229.504
39	15.2	5	18.9	357.21	6,751.269
40	20.2	6	20.2	408.04	8,242.408
41	27.5	7	21.3	453.69	9,663.597
42	37.4	8	22.9	524.41	12,008.989
43	18.4	9	24.4	595.36	14,526.784
44	29.5	10	25.1	630.01	15,813.251
45	15.1	11	27.5	756.25	20,796.875
46	42.1	12	28.2	795.25	22,425.768
47	28.2	13	29.5	870.25	25,672.375
48	32.1	14	32.1	1030.41	33,076.161
49	22.9	15	32.4	1049.76	34,012.224
50	32.4	16	35.3	1246.09	43,986.977
51	21.3	17	37.4	1398.76	52,313.624
52	25.1	18	42.1	1772.41	74,618.461
		Σ=	461.0	12910.51	390,468.026
		平均=	25.611	717.251	21,692.668

全體標準差

$$\sigma_x = S_x = \sqrt{\overline{x^2} - (\bar{x})^2} = \sqrt{717.25 - (25.611)^2} = \sqrt{717.25 - 655.92} = \sqrt{61.33} = 7.832$$

樣本標準差 $S_x = \sqrt{\frac{N}{N-1}}S_x = \sqrt{\frac{18}{17}}S_x = 1.029S_x = 8.059$

（3）計算角屋極端值分佈曲線公式

本案例 N=18 可由表 5 日本角屋氏之 Gumbel 分佈常數表，依外插法求得 $\overline{y} = 0.5689$ 及 $S_r = 1.1745$

故 $\dfrac{1}{a} = \dfrac{S_x}{S_y} = \dfrac{8.059}{1.1745} = 6.8616$

$x_0 = \overline{x} - \dfrac{1}{a}\overline{y} = 25.611 - 6.8616 \times 0.5689 = 21.7$

故角屋氏極端值分佈曲線公式

$$x = x_0 + \frac{1}{a}y = 21.7 + 6.8616y \quad \text{.........} \quad (24)$$

（4）計算各復現期下之雨量極端值

先由表 4 中 Gumbel 極端值變數 y 與復現期 T(x)與超越頻率 P(x)之關係中求得 y 值，再代入式（23）及式（24）中求得各復現期之雨量極端值如表 12 所示。

表 12　各復現期下 Gumbel 及角屋極端值計算結果

復現期 T(x)	超越百分率 P(x)%	變數值 y	Gumbel 極端值 x=21.6+7.6804y	角屋極端值 x=21.7+6.8616y
200	0.5	5.29581	62.4	58.1
100	1.0	4.60015	57.0	53.3
50	2.0	3.90194	51.7	48.6
20	5.0	2.97020	44.5	42.2
10	10.0	2.25037	39.0	37.2
5	20.0	1.49994	33.2	32.0
2	50.0	0.36651	24.4	24.2

4. 周文德(chow)法

茲列出計算例如下：(樣本資料及其計算過程如表 11 所示)

$$\sigma = \sqrt{\frac{\Sigma(\bar{x}-x)^2}{N-1}} = \sqrt{\frac{N}{N-1}}S_x = \sqrt{\frac{18}{17}} \times 7.832 = 8.059$$

$$\bar{x} = 25.611 \quad \therefore x = \bar{x} + \sigma x = 25.611 + 8.059K$$

K 值由 T～K 關係表（表 8）求得，故可求得各復現期之雨量極端值

T=200 年	x=25.611+8.059×3.6791=55.3
T=100 年	x=25.611+8.059×3.1367=50.9
T=50 年	x=25.611+8.059×2.5914=46.5
T=20 年	x=25.611+8.059×1.8658=40.6
T=10 年	x=25.611+8.059×1.3046=36.1
T=5 年	x=25.611+8.059×0.7195=31.4
T=2 年	x=25.611+8.059×0.1643=26.9

5. 常態分佈法

根據表 11 知 $\overline{X} = \mu = 25.6$；S＝$\sigma$＝8.059；N＝18。順位 9 及 10 之中央值介於 24.4～25.1 間，平均 24.8，接近 $\overline{X} = 25.611$。因此，該樣料之分佈型，非絕對常態型，祇是近似常態型而已。

如樣本之分佈屬（或假定）常態分佈型時，只需計算樣本之平均值及標準偏差，利用表 1 依下法可計算不同頻率之發生值，如表 13 所示。

（1） 欄：列出所需計算之再發生年 T。

（2） 欄：相當於再發生年之超越頻率 $P = \frac{1}{T} \times 100\%$。

（3） 欄：介於(2)欄兩頻率間之頻率面積(或總發生頻率)，可依 A=100-2p 計算。

（4） 欄：由表 1 標準常態分佈面積表，查得相當於 $\frac{A}{2}$ 時之 Z 值。

（5） 欄：根據(4)欄，分別求出 $\overline{X} + Z \cdot \sigma$ 值。

$\overline{X} + Z \cdot \sigma$ 相當於復現期 T 時之超越頻率發生值。

表 13　常態分佈法計算例

(1) 再發生年	(2) 超越頻率 p	(3) 頻率面積 A	(4) $Z=\frac{X-\mu}{\sigma}$	(5) $X=\overline{X}+Z\sigma$
2	50%	0%	±0	25.6
5	20	60	±0.842	32.6
10	10	80	±1.282	36.0
20	5	90	±1.645	38.9
50	2	96	±2.055	42.4
100	1	98	±2.326	43.6
200	0.5	99	±2.575	46.5

四、綜合討論

由以上暴雨量頻率分析範例可得出六種不同頻率分析法所得出之計算結果如表 14 所示。

表 14　暴雨量頻率分析計算結果

復現期，T（年）	對數-皮爾森第三型	海生法	Gumbel 極端值（最大）法	Gumbel 極端值角屋氏法	周文德法	常態分佈法
200	54.3	52.5	62.4	58.1	55.3	46.5
100	50.4	47.8	57.0	53.3	50.9	43.6
50	46.4	45.9	51.7	48.6	46.5	42.4
20	41.0	40.1	44.5	42.2	40.6	38.9
10	36.7	36.0	39.0	37.2	36.1	36.0
5	32.0	32.2	33.2	32.0	31.4	32.6
2	24.5	25.0	24.4	24.2	26.9	25.6

由表 14 可發現各種不同頻率分析法所得之結果並不一致，究其原因可歸納如下：

1. 這些頻率分析曲線都是專家學者根據其各自掌握之實測資料數據，而根據若干假設條件推演所得，並未所普遍適用於任意情況。
2. 使用極端值系列法(Extreme-value series)的數據是自許多間隔時間（通

常採用年，或水文年）內，每間隔選出一個最大值或最小值（可用瞬時或日平均）做為分析樣本者。其缺點為沒有包括一切可能發生之極大值或極小值（如取 2 項），有時一年中之第二、三大（或小）值，比另一年之極大（或小）值可能還要大（或小）些。

3. 機率座標通常以橫軸表示頻率或再發生年，縱軸表示變數。縱座標通常為普通方格（直線等分，稱普通機率紙），或為對數（稱對數機率紙），或為平方根格子，或為立方根格子等。而橫座標之格子劃分，有 Hazen 機率格紙及 Gumbel 機率格紙兩種。目前常用之頻率計算方法有很多種，除 Gumbel 法必須採用 Gumbel 機率格紙外，Gumbel 機率格紙之橫座標劃分可依 $P = e^{-e^{-y}}$ 繪製，其餘方法各頻率分析皆可採用 Hazen 機率格紙，至於縱座標究竟應採用何型，並無硬性規定，衹要點繪樣本資料後；各點會儘量分佈成直線狀，容易繪製直線或曲線以便內插或向外延伸即可。

4. 一旦復現期或發生頻率(x)與暴雨量(y)成直線關係，及回歸直線可表示為 y=A+Bx 式中，y 為縱座標，x 為橫座標，A 為截距，B 為斜率，A、B 數據可依最小＝乘方(Least mean square method)求得實測資料與回歸直線之密合程度常用相關係數 σ(correlation coefficient)表示。

$$\sigma = \frac{\sum (x-\bar{x})(y-\bar{y})}{\sqrt{\sum (x-\bar{x})^2 \sum (y-\bar{y})^2}} \qquad \text{..........} \quad (25)$$

式中 $\bar{x} = \frac{\bar{2}x}{n}$　$\bar{y} = \frac{\bar{2}y}{n}$　n 為樣本數量

當 $|\sigma| = 1$ 是完全相關，$|\sigma| = 0$ 為完全不相關，即 $|\sigma|$ 值越接近於 1 則數據與回歸直線越密合則可信度越高，在工程實務上，只要將一組水文資料之各縱橫座標值，輸入一般商業用之設計電腦軟體即可求得回歸直線之斜率截距和相關係數，也可以判斷所使用之頻率分析方法是否適用。

5. 根據經驗，目前台灣地區暴雨頻率分析常用的方法有①對數常態分佈、②皮爾森第三型、③Gumbel 極端值（最大）第一型及④對數-皮爾遜第三型等四種，其中又以皮爾森第三型及對數皮爾遜第三型最為工程界所廣為採用。因其為採用三參數（平均值、標準差、偏差係數）之方法，理論上較具彈性，但偏差係數推估之準確度對分析之成果影響甚大，尤其是偏差係數若為負值時，其低頻率直可能偏小，故仍需參酌其他分析方法謹慎決定。

五、結語與建議

降雨量、河川流量及其他各種水文氣象或波浪資料，係受自然界之物理因素與發生機率因素所控制之隨機性量，在各種水利工程計畫中，究竟應如何計算、評估，或如何決定計畫基準是一件困難而重要的工作。

水文統計學屬應用統計學之一部分，為研究能提供對水利工程計劃有用情報之方法。它是把一系列水文資料認為遵守某一法則之機率過程之出現值，研究介在其內之統計法則之方法。

水文統計學之研究，目前尚未達到完美之地步，其原因如下：

（1）其對象為自然現象，無法重新再測定，或補充資料。

（2）資料之精確度受觀測組織、方法、儀器等因素之影響，且因過去觀測中斷，或廢站關係，無法獲得十分長期之水文資料。

（3）水文資料之分佈多非常態分布型。

（4）受災害關連而發展，重視不常發生之極端值之推定問題，至今之研究重點都放在一變數之頻率特性之解析方法之研究所致。

水文統計之目的，係如何求出可代表各種水文資料之非對稱之分佈之p(x)，以便推定極大超越頻率及復現期下之數據。

頻率分析方法可為（1）設法使其常態化，利用常態分佈之特性求解之方法（例如對數常態，n乘方常態，經驗的分佈函數之直接常態化等方法）。（2）直接利用非對稱分佈函數之方法（例如指數型分佈，r(Gamma)分布，極端值分佈等方法）。（3）上列兩種方法混何者。

水文統計之內容，通常包括（一）一變數之理論（即頻率分析），（二）二變數以上之理論（即相關分析），（三）時系列理論，本文僅作拋磚引玉，希望未來水利會訊會有更多的專家學者提供更為先進之方法以利工程實務應用之參考，共同為國內水利建設之安全性而努力，是所至盼。

六、參考資料

1. 林維明（2006），水文分析系統觀念與暴雨頻率分析概說，水利會訊第 9 期，p.92-105。

2. 余濬（2004），降雨強度之推算，科技圖書公司。

3. 張啟濱（1975），水文統計講義，台灣省水利局水文工作人員在職講習班編印（71-C-21-E-556 農補款計畫）。

4. 林維明（2002），水文分析暨工程設計系統應用軟體開發研究計畫報告，華昌工程顧問公司接受內政部土地重劃局委託研究。